

Chapitre 4 : Dynamique des fluides Newtoniens

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on focalise l'étude sur les fluides dits « classiques » ou « newtoniens ». C'est le cas de la majorité des fluides d'usage courant tels que l'eau, l'air ou l'huile. Ces fluides sont caractérisés par des comportements rhéologique et thermique particuliers. En effet, le tenseur des taux de cisaillement (décrivant les contraintes de cisaillement tangentielles) et le vecteur courant de chaleur s'expriment linéairement respectivement en fonction du tenseur des taux de déformations (caractérisant la vitesse de déformation) et du vecteur gradient de la température. Les équations locales décrivant la dynamique de ces fluides sont appelées les équations de Navier-Stokes.

4.2 Position du problème - Démarche de fermeture

En pratique, l'écoulement d'un milieu fluide susceptible d'effectuer des échanges thermiques avec le milieu extérieur est totalement décrit par la donnée des champs eulériens des variables hydrodynamiques : La vitesse \mathbf{v} et la pression p , ainsi que le champ de la température T .

La description eulérienne de ces grandeurs est obtenue par l'intégration des équations locales de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie établies dans les chapitres précédents (dans le domaine de l'écoulement et en tenant compte des conditions aux limites correspondantes). On ces équations récapitule comme suit :

- Conservation de la masse (équation (2-28) ; Chapitre 2) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4-1)$$

- Conservation de la quantité de mouvement (équation (3-19) ; Chapitre 3) :

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (4-2)$$

- Conservation de l'énergie (équation (3-43) ; Chapitre 3) :

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} + e \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \right] = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \quad (4-3)$$

- Bilan de l'énergie cinétique (équation (3-49) ; Chapitre 3) :

$$\frac{\partial e_c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e_c = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \quad \text{avec} \quad e_c = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (4-4)$$

- Bilan de l'énergie interne (équation (3-50) ; Chapitre 3) :

$$\rho \left[\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e \right] = - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r + \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \quad (4-5)$$

Dans ce système d'équations, le bilan de l'énergie cinétique (4-4) est déduit à partir de celui de quantité de mouvement (4-2). D'autre part le bilan (4-5) de l'énergie interne n'est autre que la différence entre (4-3) et (4-4). Ce système est par conséquent formé par 3 équations indépendantes qu'on peut choisir par exemple (4-1) ; (4-2) et (4-5).

Le problème ainsi formulé reste ouvert : il contient plus d'inconnues que d'équations. En effet, une comptabilisation des inconnues mises en jeu montre que l'on ait 9 inconnues répertoriées comme suit :

- Vitesse : \mathbf{v}
- Pression : p
- Température : T
- Masse volumique : ρ
- Densité massique des forces à distance : \mathbf{f}
- Densité massique de la puissance calorifique rayonnée : r
- Tenseur des taux de cisaillement : $\boldsymbol{\tau}$
- Vecteur courant de chaleur : \mathbf{q}
- Densité massique de l'énergie interne : e

Si on désire maintenir la vitesse \mathbf{v} , la pression p et la température T comme inconnues principales, on serait amené à fermer ce système par l'introduction de 6 équations complémentaires (en nombre égal aux inconnues restant). Comme ce système est valable pour des milieux fluides de natures très

différentes, les équations complémentaires qu'on doit ajouter doivent préciser la constitution particulière de chaque milieu : ce sont *les lois constitutives*.

D'autre part, dans la plupart des cas d'applications, les densités massiques des forces à distance \mathbf{f} et de la puissance calorifique r sont à priori connues (\mathbf{f} s'identifie à l'accélération de pesanteur \mathbf{g} dans un repère Galiléen et r est décrite par la loi de Stéphane). Ainsi, les lois constitutives devront exprimer ρ , e , $\boldsymbol{\tau}$ et \mathbf{q} en fonction de \mathbf{v} , p et T .

4.3 Lois constitutives pour un fluide Newtonien

4.3.1 Loi constitutive de fermeture du tenseur des taux de cisaillement $\boldsymbol{\tau}$ déduite de la rhéologie

Du point de vue de la mécanique, la différence entre un fluide réel et un fluide parfait réside dans l'absence dans le cas de fluide parfait de tout effort de cisaillement. Ceci implique que :

- A l'échelle microscopique les particules fluides glissent les unes sur les autres sans frottement entre elles.
- A l'échelle macroscopique les contraintes de contact se réduisent aux contraintes de pression qui s'exercent perpendiculairement à la surface extérieure.

Ce comportement se manifeste particulièrement en présence de parois solides. En effet, aux points de contact entre un fluide parfait en écoulement et une paroi (étanche), seule la composante normale à la paroi de la vitesse de l'écoulement est nulle. Les conditions d'écoulement à la paroi sont alors des conditions de glissement. Cependant, les conditions à la paroi qui régissent l'écoulement d'un fluide réel sont des conditions d'adhérence : la vitesse aux points de contact entre le fluide réel et la paroi est égale à la vitesse de la paroi.

4.3.1.1 Introduction de la viscosité

Si on considère l'expérience suivante : Soit un fluide enfermé entre deux plaques planes parallèles distantes d'une épaisseur h très inférieure aux dimensions caractéristiques des deux plaques (voir Figure 1).

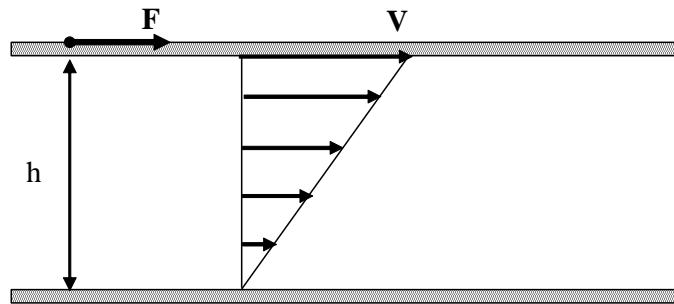


Figure 1 : champ de vitesse entre deux plaques planes parallèles

On se propose de maintenir la plaque supérieure en mouvement de translation uniforme à la vitesse \mathbf{V} . Si le fluide était parfait, conformément à ce que nous avons décrit au paragraphe précédent, il suffit d'exercer une impulsion permettant à la plaque d'atteindre la vitesse \mathbf{V} , elle gardera cette vitesse en mouvement uniforme. Cependant, dans le cas d'un fluide réel on doit maintenir l'exercice d'une force tangentielle colinéaire à la vitesse \mathbf{V} . On remarque également que pour un grand nombre de fluides tels que l'eau, l'huile ou l'alcool, la force exercée par unité de surface $\frac{F}{S}$ est proportionnelle au rapport $\frac{V}{h}$:

$$\frac{F}{S} \propto \frac{V}{h} \quad (4-6)$$

Le rapport $\frac{F}{S}$ est homogène à une densité surfacique de force. Il représente la contrainte de cisaillement exercée sur le fluide. Tandis que le second membre de (4-6) $\frac{V}{h}$ est homogène à l'inverse d'un temps. Il représente le gradient de vitesse de l'écoulement du fluide qui reste sensiblement uniforme sur la faible épaisseur h .

Le coefficient de proportionnalité entre ces deux grandeurs représente la *viscosité dynamique* du fluide μ . C'est une grandeur physique caractéristique du milieu fluide. Elle est homogène à une « pression x temps » donc de dimension $M L^{-1} T^{-1}$. La viscosité dynamique est une grandeur intensive qui ne dépend que de la température. Elle est exprimée dans le S.I. en Poiseuille :

$$1 \text{ Poiseuille} = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad (4-7)$$

Ce comportement de proportionnalité correspond à une grande classe de fluides dans la nature dits *fluides Newtoniens*. On définit également pour ces fluides la viscosité cinématique ν obtenue par le rapport de la viscosité dynamique sur la masse volumique :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (4-8)$$

Le tableau 1 ci-dessous montre les valeurs mesurées de ces grandeurs pour quelques fluides.

Tableau 1 : masse volumique, viscosités dynamique et cinématique pour quelques fluides

Fluides		ρ (kg m ⁻³)	μ (Poiseuille)	ν (m ² s ⁻¹)
Eau (1 atm, 20 °C)		998.2	1.00 . 10 ⁻⁰³	1.004 . 10 ⁻⁶
Eau de mer (1 atm, 15 °C)		1025.0	1.23 . 10 ⁻⁰³	1.2 . 10 ⁻⁶
Mercure (1 atm, 15 °C)		13555.0	1.49 . 10 ⁻⁰³	1.1 . 10 ⁻⁷
Alcool éthylène (96% dans l'eau)		788.6	1.18 . 10 ⁻⁰³	1.5 . 10 ⁻⁶
Glycérine (1 atm, 20°C)		1257.6	1.51	1.2 . 10 ⁻³
Air	-20 °C	1,58E-05	1.58 . 10 ⁻⁰⁵	1.13 . 10 ⁻⁵
	0 °C	1,70E-05	1.70 . 10 ⁻⁰⁵	1.32 . 10 ⁻⁵
	20 °C	1,80E-05	1.80 . 10 ⁻⁰⁵	1.49 . 10 ⁻⁵
	60 °C	2,04E-05	2.04 . 10 ⁻⁰⁵	1.92 . 10 ⁻⁵

On note qu'il existe également dans la nature des fluides dit fluides *non Newtoniens* qui ne réagissent pas dans l'expérience précédente de la même manière. En effet, la contrainte de cisaillement $\frac{F}{S}$ qu'on doit maintenir appliquée pour ces fluides n'est pas proportionnelle aux taux de déformation $\frac{V}{h}$. Deux comportements sont observés expérimentalement selon la nature du fluide utilisé : Il existe des fluides (tels que les solutions de polymères) qui montrent une résistance importante aux faibles vitesses de déplacement de la plaque. Au fur et à mesure que la vitesse augmente ils deviennent plus "fluides". Un tel comportement s'appelle *rhéofluidifiant*. On observe

au contraire pour d'autres fluides une faible résistance pour les petites vitesses de la plaque, mais qui deviennent assez rigides pour les fortes vitesses.

En termes de viscosité, les fluides non Newtoniens peuvent être interprétés comme des fluides à viscosité variables en fonction du taux de déformation. L'interprétation d'un tel comportement vis-à-vis de la constitution atomique de ces milieux constitue la discipline appelée *rhéologie*. On définit le rhéogramme qui est un diagramme où on représente les variations des composantes du tenseur des taux de cisaillement τ_{ij} en fonction de celles du tenseur des taux de déformations D_{ij} . La figure suivante montre schématiquement les rhéogrammes relatifs aux trois types de fluides décrits ci-dessus

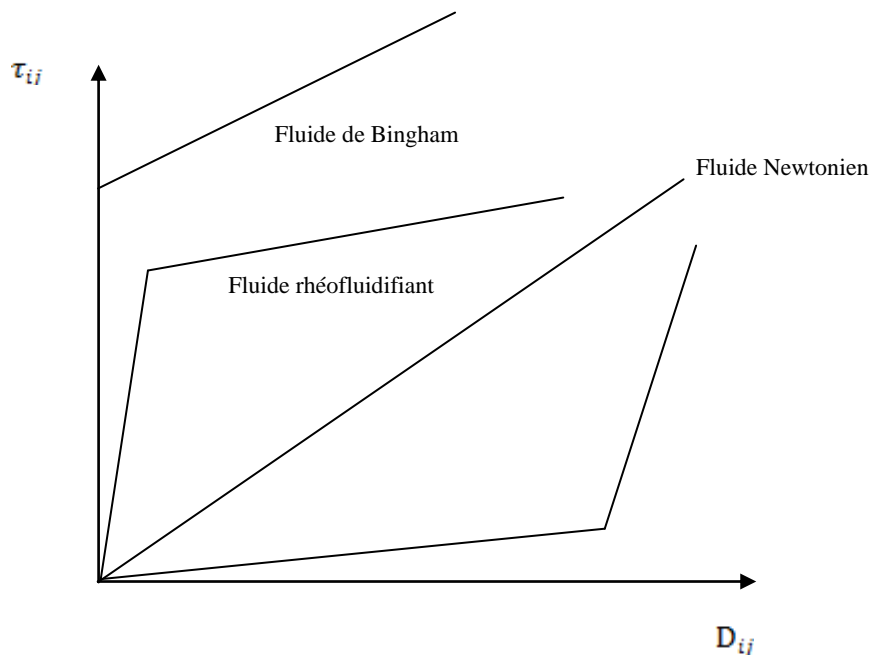


Figure 2 : Rhéogrammes de différents types de fluides non Newtoniens

4.3.1.2 Loi de comportement rhéologique d'un fluide Newtonien

Le tenseur des taux de cisaillement dans un fluide Newtonien est exprimé en fonction du tenseur des taux de déformation \mathbf{D} par la loi de comportement linéaire de Newton qui s'écrit sous sa forme la plus générale :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{D} + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu\right)(\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \quad (4.9)$$

μ est la viscosité dynamique et μ_v est la viscosité volumique ou deuxième viscosité rencontrée dans le cas des fluides compressibles. Compte tenu de l'équation de conservation de la masse, cette loi de comportement se réduit dans le cas de fluide incompressible à l'expression suivante :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{D} \quad (4.10)$$

Les éléments de ce tenseur $\boldsymbol{\tau}$ s'expriment ainsi en fonction du gradient de vitesse comme suit :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.11)$$

4.3.2 Loi constitutive de fermeture du vecteur courant de chaleur \mathbf{q} : loi de Fourier

De même pour un fluide Newtonien, le vecteur courant de chaleur \mathbf{q} est exprimé en fonction du gradient de température ∇T par une loi de comportement linéaire donnée par :

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \quad (4.12)$$

Où le coefficient λ est la conductivité thermique du fluide. C'est une propriété caractéristique du milieu fluide qui ne dépend que de la température. Elle est de dimension $MT^{-3}({}^\circ K)^{-1}$ et donc

homogène à « $\frac{\text{Puissance}}{\text{Longueur} \times \text{Température}}$ ». On remarque enfin que le signe “-” qui apparaît dans

(4-12) traduit le fait que le flux de chaleur s'oriente spontanément des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides dans un milieu. Le tableau suivant montre des valeurs de cette grandeur à 20 °C pour quelques matériaux

Tableau 2 : valeurs de la conductivité thermique mesurée à 20 °C pour quelques matériaux

Matériau	λ à 20 °C (W m ⁻¹ °K ⁻¹)
Eau	0.6
Air sec immobile (P = 1 atm)	0.0262
Cuivre	390
Béton	0.92
Laine de verre	0.04
Liège	0.04

4.3.3 Loi constitutive de fermeture de l'énergie interne déduite de la thermodynamique

On se restreint dans notre développement au cas des fluides incompressibles. La masse volumique ρ reste dans ce cas constante le long de la trajectoire d'une particule fluide. Nous admettons également l'hypothèse de l'état local, ce qui consiste à supposer que toute particule fluide passe par des états d'équilibre intermédiaires au cours de son évolution. Cette hypothèse permet d'exprimer la dérivée particulaire de la densité massique de l'énergie totale "e" en fonction de celle de la densité massique de l'entropie "s" à l'aide de la relation de Gibbs comme suit :

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho T \frac{ds}{dt} - \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (4-13)$$

comme le fluide est incompressible, cette relation se réduit à :

$$de = \left(\frac{ds}{dT} T \right) dT = C_v(T) dT \quad (4-14)$$

où C_v est la chaleur spécifique à volume constant.

L'équation (4-5) du bilan de l'énergie interne s'écrit alors compte tenue de (4-14) sous la FORME suivante faisant intervenir la température T :

$$\rho C_v \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right] = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r + \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \quad (4-15)$$

4.4 Récapitulation : le système final des équations d'un milieu fluide

4.4.1 Problème hydrodynamique : Les équations de Navier-Stockes

Compte tenu de la fermeture (4-10), les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement d'un fluide Newtonien incompressible s'écrivent comme suit :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4-16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (4-17)$$

Du point de vue mathématique, ces équations forment un système différentiel fermé d'inconnues les champs de vitesse $\mathbf{v}(x_i, t)$ et de pression $p(x_i, t)$ qu'on appelle *le système de Navier-Stokes*. La résolution de ce système avec la prise en compte des conditions aux limites auxquelles obéit le milieu fluide conduit ainsi à la description totale de l'écoulement.

Le caractère universel de ce système laisse à s'attendre qu'on serait capable de décrire des systèmes fluides à des échelles de longueur caractéristiques extrêmement différentes : depuis les écoulements géophysiques qui se produisent à l'échelle de la terre jusqu'aux écoulements biologiques qui se produisent à une échelle microscopique au sein d'un organisme. Seulement la non linéarité de ce système qui apparaît au niveau du terme convectif $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ le rend très instable et la résolution analytique dans le cas général n'est pas possible. Ce système n'est solvable analytiquement que dans un nombre assez réduit de cas d'écoulements qui vérifient des hypothèses de symétrie permettant de le linéariser.

Dans les annexes I et II sont explicitées le développement de ce système d'équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes et cylindriques.

4.4.2 Problème thermique : L'équation de la chaleur

D'après les fermetures (4-10) et (4-12), l'équation de la chaleur (4-15) s'écrit sous la forme fermée suivante :

$$\rho C_v \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right] = \Delta T + \rho r + \mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t] : (\nabla \mathbf{v}) \quad (4-18)$$

Le dernier terme dans cette équation montre la puissance produite calorifique produite au sein de l'écoulement par frottement visqueux entre les particules fluides.

Comme dans un grand nombre de cas d'écoulements les grandeurs intensives ρ , μ et C_v varient peu en fonction de la température, les deux problèmes dynamique et thermique peuvent être découplés. Le problème thermique est alors abordé après avoir résolu le problème dynamique.